COMITATO NAZIONALE PER L'ENERGIA NUCLEARE
Laboratori Nazionali di Frascati

LNF-63/55

G. Sacerdoti e F. Uccelli:

TEORIA LINEARE DELLE MACCHINE ACCELERATRICI.

Parte III: Calcolo dei coefficienti di accoppiamento tra le oscillazioni orizzontali di sincrotrone e di betatrone. Influenza delle fluttuazioni dell'irraggiamento sulle dimensioni del fascio.

Nota interna: n. 210

Servizio Documentazione
dei Laboratori Nazionali di Frascati del CNEN
Casella Postale 70 - Frascati (Roma)

Laboratori Nazionali di Frascati
Servizio Documentazione

LNF-63/55

Nota interna: n. 210
5 Luglio 1963

G. Sacerdoti e F. Uccelli:

TEORIA LINEARE DELLE MACCHINE ACCELERATRICI. -
Parte III: Calcolo dei coefficienti di accoppiamento tra le oscillazioni orizzontali di sincrotrone e di betatrone. Influenza delle fluttuazioni dell'irraggiamento sulle dimensioni del fascio.

Introduzione

Nella presente nota viene indicato un procedimento di calcolo per determinare le costanti di accoppiamento tra le oscillazioni di betatrone e quelle di sincrotrone. Verrà inoltre esaminata l'influenza che la fluttuazione statistica dell'irraggiamento porta sulle dimensioni orizzontali del fascio.

Nelle prossime note svolgeremo, con gli stessi metodi, il calcolo della vita media del fascio, ed esamineremo gli effetti della carica spaziale e dell'interazione tra le particelle sulle dimensioni del fascio medesimo, nonchè gli effetti delle correnti-immagine sul ferro delle espansioni polari.

Calcolo dell'accoppiamento tra oscillazioni di betatrone e di sincrotrone.

L'equazione secolare del determinante di trasferimento tra l'entrata e l'uscita di un elemento periodico di una struttura magnetica si può, trascurando l'irraggiamento, esprimere nella seguente forma:

$$(1) \qquad (\lambda - e^{i\varphi_1 + \varepsilon_1})(\lambda - e^{-i\varphi_1 - \varepsilon_1})(\lambda - e^{i\varphi_2 - \varepsilon_1})(\lambda - e^{-i\varphi_2 - \varepsilon_1}) = 0$$

ε_1 è il coefficiente d'accoppiamento tra le oscillazioni di betatrone e quelle di sincrotrone, ed è dovuto alle perturbazioni introdotte dal termine Δ_4 (vedi relaz. int. n. 190 LNF-63/18).

Per calcolare l'influenza della perturbazione Δ_4, e quindi il coefficiente d'accoppiamento ε_1, procederemo analogamente a quanto svolto nelle pagg. 1 - 3 della nota citata.

Ponendo nella (7):

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0 \tag{2}$$

otterremo la matrice di trasferimento tra s_0 ed s_1 (vedi fig. 1):

$$\left| G_{ik}(\Delta_4 ds_1) \right| = \left| \begin{matrix} A_{11}+M_{13}m_{41}\Delta_4 ds_1 ; & A_{12}+M_{13}m_{42}\Delta_4 ds_1 ; & A_{13}+M_{13}m_{43}\Delta_4 ds_1 ; & M_{13}\Delta_4 ds_1 \\ A_{21}+M_{23}m_{41}\Delta_4 ds_1 ; & A_{22}+M_{23}m_{42}\Delta_4 ds_1 ; & A_{23}+M_{23}m_{43}\Delta_4 ds_1 ; & M_{23}\Delta_4 ds_1 \\ m_{41}\Delta_4 ds_1 ; & m_{42}\Delta_4 ds_1 ; & 1+m_{43}\Delta_4 ds_1 ; & \Delta_4 ds_1 \\ A_{41}+M_{43}m_{41}\Delta_4 ds_1 ; & A_{42}+M_{43}m_{42}\Delta_4 ds_1 ; & A_{43}+M_{43}m_{43}\Delta_4 ds_1 ; & 1+M_{43}\Delta_4 ds_1 \end{matrix} \right| \tag{3}$$

L'equazione secolare che ne segue, risulta:

$$\lambda^4 - \lambda^3\left[2+A_{11}+A_{22}+C_1\Delta_4\right] + \lambda^2\left[2+2(A_{11}+A_{22})+C_2\Delta_4\right] - \lambda\left[2+A_{11}+A_{22}+C_3\Delta_4\right] + 1 = 0 \tag{4}$$

ove:

$$C_1 = (M_{13}m_{41} + M_{23}m_{42} + M_{43} + m_{43})\, ds_1$$

$$\begin{aligned} C_2 = -\Big\{ & M_{13}(M_{41}m_{11}+M_{42}m_{21}) + M_{23}(M_{41}m_{12}+M_{42}m_{22}) + m_{41}\big[M_{23}(M_{11}m_{12}+M_{12}m_{22}) - \\ & - M_{13}(M_{21}m_{12}+M_{22}m_{22})\big] + m_{42}\big[M_{13}(M_{21}m_{11}+M_{22}m_{21}) - M_{23}(M_{11}m_{11}+M_{12}m_{21})\big] + \\ & + m_{42}(M_{21}m_{13}+M_{22}m_{23}+M_{23}) - m_{41}(M_{11}m_{13}+M_{12}m_{23}+M_{13}) + M_{41}m_{13} + \\ & + M_{42}m_{23} - (M_{43}+m_{43})(M_{11}m_{11}+M_{12}m_{21}+M_{21}m_{12}+M_{22}m_{22})\Big\}\, ds_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_3 = \Big\{ & m_{42}(m_{13}m_{21}-m_{23}m_{12}) - m_{41}(m_{22}m_{13}-m_{23}m_{12}) + M_{42}(M_{13}M_{21}-M_{23}M_{12}) - \\ & - M_{41}(M_{22}M_{13}-M_{23}M_{12}) + (m_{11}m_{23}-m_{13}m_{21})(M_{41}M_{12}-M_{42}M_{11}) + \\ & + (m_{12}m_{23}-m_{22}m_{13})(M_{41}M_{22}-M_{42}M_{21}) + M_{43} + m_{43}\Big\}\, ds_1 \end{aligned}$$

Confrontando questa espressione con l'equazione generica

$$\left(\lambda - e^{i(q_1+\delta\Delta q_1)}e^{\delta\varepsilon_1}\right)\left(\lambda - e^{-i(q_1+\delta\Delta q_1)}e^{\delta\varepsilon_1}\right)\left(\lambda - e^{i\delta\Delta q_2}e^{-\delta\varepsilon_1}\right)\left(\lambda - e^{-i\delta\Delta q_2}e^{-\delta\varepsilon_1}\right) = 0 \tag{5}$$

si ottiene, avendo posto $\cos \delta\Delta_{q2} = 1 - \delta$:

$$\delta\varepsilon_1 = \frac{\Delta_4}{4}\,\frac{(C_1+C_3)}{\cos q_1 - 1} \qquad \delta = \frac{\Delta_4}{4}\,\frac{(C_2+C_3-C_1)}{1-\cos q_1}$$

(6)

$$\delta\Delta q_1 = \frac{\Delta_4}{4}\,\frac{(C_3-C_1)}{\sin q_1} - \frac{\delta}{\sin q_1}$$

Qualora si desiderino i suddetti coefficienti in termini finiti, occorrerà integrare su tutta la traiettoria dell'elemento periodico le espressioni (6).

<u>Calcolo della dispersione orizzontale del fascio dovuta alla fluttuazione dell'irraggiamento.</u>

Molte cause di diversa natura possono pensarsi determinanti la dimensione orizzontale del fascio; ad esempio, la fluttuazione dell'irraggiamento, l'interazione tra particelle del fascio, l'irraggiamento coerente, gli urti contro molecole del gas residuo, attratte eventualmente nella zona del fascio per azione elettrodinamica, etc. Ci occuperemo, in questo paragrafo, degli effetti dovuti alla fluttuazione dell'irraggiamento.

Indichiamo con Δ_{y1}, Δ_{y2}. . . . . Δ_{yn} le differenze tra l'energia effettivamente irraggiata e quella che mediamente è irraggiata da una particella che percorra l'elemento 1, 2, ... n di struttura periodica.

Avremo:

(7) $$|X_n| = |G_{ik}|^n |X_0| + |G_{ik}|^{n-1}|\Delta y_1| + |G_{ik}|^{n-2}|\Delta y_2| + \cdots |G_{ik}||\Delta y_{n-1}| + |\Delta y_n|$$

ove, come è noto

$$|X_0| = \begin{vmatrix} x_0 \\ x_0' \\ \frac{\Delta p}{p_0} \\ \Delta y \end{vmatrix} \qquad |X_n| = \begin{vmatrix} x_n \\ x_n' \\ \frac{\Delta p}{p_0} \\ \Delta y \end{vmatrix}$$

$$|\Delta y_i| = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \frac{\Delta y_i}{p_0 c} \qquad \Delta y_i = h(\omega_i - \bar{\omega})$$

La (7) può anche scriversi

$$|X_n| = |D^{-1}||\lambda^n||D||X_0| + |D^{-1}||\lambda^{n-1}||D||\Delta y_1| + \cdots\cdots =$$

(8)

$$= |D^{-1}||\lambda^n||D||X_0| + \sum_{k}^{1\ldots n}\left[|D^{-1}||\lambda^{n-k}||D||\Delta y_k|\right]$$

ove λ sono le radici dell'equazione secolare relativa alla matrice $|G_{i,k}|$ e $|D|$, $|D^{-1}|$, sono rispettivamente la matrice diagonalizzante e la trasposta della $|G_{i,k}|$.

Se i λ sono del tipo e^{a+ib}, con $a<0$, cioè nel caso in cui le oscillazioni di betatrone e di sincrotrone sono smorzate, per n abbastanza grande, potremo scrivere:

$$X_n = d_{11}^{-1} d_{13} \lambda_1^{n-1} \frac{\Delta y_1}{p_0 c} + d_{12}^{-1} d_{23} \lambda_2^{n-1} \frac{\Delta y_1}{p_0 c} + d_{13}^{-1} d_{33} \lambda_3^{n-1} \frac{\Delta y_1}{p_0 c} + d_{14}^{-1} d_{43} \lambda_4^{n-1} \frac{\Delta y_1}{p_0 c} + \dots$$

$$(9) \qquad + \dots = \frac{1}{p_0 c}\Big[d_{11}^{-1} d_{13} \sum_k^{1\dots n} \lambda_1^{n-k} \Delta y_k + d_{12}^{-1} d_{23} \sum_k^{1\dots n} \lambda_2^{n-k} \Delta y_k + d_{13}^{-1} d_{33} \sum_k^{1\dots n} \lambda_3^{n-k} \Delta y_k +$$

$$+ d_{14}^{-1} d_{43} \sum_k^{1\dots n} \lambda_4^{n-k} \Delta y_k\Big] \qquad \text{ove } |d_{ik}^{-1}| \equiv |D^{-1}|\,;\ |d_{ik}| \equiv |D|$$

Se Δ_{yk} sono variabili indipendenti, si ottiene un valore medio:

$$(10) \qquad \bar{X}_n = \sqrt{\sum_k^{1\dots n} (a_1 \lambda_1^k + a_2 \lambda_2^k + a_3 \lambda_3^k + a_4 \lambda_4^k)^2 \frac{\overline{\Delta y}_{n-k}^{2}}{(p_0 c)^2}}$$

ove abbiamo posto

$$a_1 = d_{11}^{-1} d_{13}\,; \quad a_2 = d_{12}^{-1} d_{23}\,; \quad a_3 = d_{13}^{-1} d_{33}\,; \quad a_4 = d_{14}^{-1} d_{43}$$

Essendo lo scarto quadratico medio $\bar{\Delta}_{yk}$ indipendente da k, l'espressione (10) si riconduce a

$$\bar{X}_n = \frac{\bar{\Delta} y_k}{p_0 c}\sqrt{\sum_k^{1\dots n}\left[a_1\lambda_1^k + a_2\lambda_2^k + a_3\lambda_3^k + a_4\lambda_4^k\right]^2} = \frac{\bar{\Delta} y_k}{p_0 c}\sqrt{\sum_k^{1\dots n}\Big[a_1^2\lambda_1^{2k} + a_2^2\lambda_2^{2k} + a_3^2\lambda_3^{2k} +}$$

$$(11) \qquad \overline{+ a_4^2\lambda_4^{2k} + 2a_1a_2(\lambda_1\lambda_2)^k + 2a_1a_3(\lambda_1\lambda_3)^k + 2a_1a_4(\lambda_1\lambda_4)^k +}$$

$$\overline{+ 2a_2a_3(\lambda_2\lambda_3)^k + 2a_2a_4(\lambda_2\lambda_4)^k + 2a_3a_4(\lambda_3\lambda_4)^k\Big]}$$

e, per $n \to \infty$, sarà:

$$(12) \qquad \bar{X}_n = \frac{\bar{\Delta} y_k}{p_0 c}\sqrt{\frac{a_1^2}{1-\lambda_1^2} + \frac{a_2^2}{1-\lambda_2^2} + \frac{a_3^2}{1-\lambda_3^2} + \frac{a_4^2}{1-\lambda_4^2} + 2\frac{a_1a_2}{1-\lambda_1\lambda_2} + 2\frac{a_1a_3}{1-\lambda_1\lambda_3} + 2\frac{a_1a_4}{1-\lambda_1\lambda_4} +}$$

$$\overline{+ 2\frac{a_2a_3}{1-\lambda_2\lambda_3} + 2\frac{a_2a_4}{1-\lambda_2\lambda_4} + 2\frac{a_3a_4}{1-\lambda_3\lambda_4}}$$

ovvero

$$\bar{X}_n = \bar{\Delta} y_k \sqrt{\sum_i \frac{a_i^2}{1-\lambda_i^2} + \sum_{jk} 2\frac{a_j a_k}{1-\lambda_j\lambda_k}}$$

Con i, j, k, = 1, 2, 3, 4.

Il calcolo di $\overline{\Delta}_{yk}$ può essere fatto con gli elementi indicati nella parte I (relaz. int. LNF-62/67). Infatti nella relazione suddetta sono riportate le formule e i relativi diagrammi della dispersione media, dell'irraggiamento medio e della lunghezza media di radiazione.